

Modélisation en biologie L3BI

Exercices de préparation à l'examen

Jennifer Becq

28 avril 2009

1 Algèbre linéaire

1.1 Applications linéaires

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

$$a. \begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + 3y_t \\ y_{t+1} = 3x_t + 4y_t \end{cases} \quad b. \begin{cases} j = 0.33a + 0.67p \\ p = 0.75j \\ a = 0.65j + 0.35a \end{cases} \quad c. \begin{cases} y = 5z + 1/2x - 3y \\ x = -z - 3/4x \\ z = y + 2x \end{cases}$$

d. $f(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 - x_2, x_3, x_1 + x_3)$

- e. On considère les quantités totales d'ADN, d'ARNm et de protéines d'une cellule au cours du temps. La production d'ADN dépend de la quantité d'ADN répliqué et du taux de réplication des protéines impliquées dans ce processus. On estimera que 10% de l'ADN est répliqué et que 1.5% des protéines participent à la réplication avec une efficacité de 80%. De la même façon, la production d'ARNm dépend des quantités d'ADN transcrites (33%) et de l'efficacité (65%) des protéines impliquées (1% des protéines). La synthèse de protéines dépend quant à elle de la quantité d'ARNm - 60% de l'ARNm est traduit en protéines - et des protéines impliquées dans la traduction - 20% des protéines, qui ont une efficacité de 85%. On notera aussi 2% des protéines font partie du protéasome qui dégrade les protéines avec une efficacité de 100%. Pour décrire l'évolution dans le temps des quantités d'ADN, d'ARNm et de protéines d'une cellule, écrire le système d'équation linéaire associé, puis déterminer la matrice correspondante.

Correction :

$$a. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b. \begin{pmatrix} 0 & 0.67 & 0.33 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 0.65 & 0 & 0.35 \end{pmatrix} \quad c. \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & -1 \\ 1/2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e. \begin{cases} ADN_{t+1} = 0.1 ADN_t + 0.8 \times 0.015 Prot_t \\ ARN_{t+1} = 0.33 ADN_t + 0.65 \times 0.01 Prot_t \\ Prot_{t+1} = 0.6 ARN_t + 0.85 \times 0.2 Prot_t - 0.02 Prot_t \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.012 \\ 0.33 & 0 & 0.0065 \\ 0 & 0.6 & 0.15 \end{pmatrix}$$

1.2 Déterminants

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 3 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1-x & 3+x \\ -2y & 4-y \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ g. $\begin{pmatrix} x+3 & 5 & 0 \\ 2 & x-4 & 0 \\ 6 & -2 & -2-x \end{pmatrix}$

Correction :

a. $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$
b. $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$
c. $(\lambda+1) \times -\lambda - (-2 \times 3) = -\lambda^2 - \lambda + 6$
d. $(1-x)(4-y) - (-2y)(3+x) = 4 - 4x + 5y + 3xy$
e. $0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \rightarrow 1 \cdot (1 \times -2 - 0 \times 5) = -2$
f. $\lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) - 2\lambda = \lambda^3 - 4\lambda$
g. $0 - 0 + (-2-x) \cdot \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} \rightarrow -(x+2)((x+3)(x-4) - 10) = 44 + 24x - x^2 - x^3$

1.3 Racines de polynômes

Déterminer les racines des polynômes suivants :

a. $x^2 - 4 = 0$
b. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
c. $(x+1)(ax^2 + bx + c) = 0$, avec a, b et c des constantes dans $\mathbb{R}$
d. $Y^3 - 49Y = 0$
e. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
f. $-6 + 20x - 18x^2 + 4x^3 = 0$
g. $\lambda^4 + 25 - 26\lambda^2 = 0$

Correction :

a. $x_1 = 2, x_2 = -2$
b. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$
c. discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$, donc racines : $x_1 = -1, x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
d. $Y_1 = 0, Y_2 = 7, Y_3 = -7$
e. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$
f. $x_1 = 1, x_2 = 1/2, x_3 = 3$
g. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -5$

1.4 Vecteurs propres

Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre mentionnée :

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$

b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$

c. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

e. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$

f. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Correction :

a. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

d. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pour λ_2 , 2 vecteurs propres possibles, par ex : $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(il suffit de vérifier $x + y + z = 0$)

e. par ex : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (il suffit de vérifier $x + 2y + 3z = 0$)

f. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.5 Comportement aux grandes générations

Soit M la matrice f. de l'exercice précédent et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Exprimer

à l'aide des valeurs propres λ_1 et λ_3 et des vecteurs propres associés, la valeur de $M^n \cdot \vec{v}$.
Calculer $M^3 \cdot \vec{v}$

Correction :

$$\vec{v} = 100 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M^n \cdot \vec{v} = M^n \cdot (100 \times \vec{u}_1 + 20 \times \vec{u}_3)$$

$$M^n \cdot \vec{v} = 100 \times M^n \cdot \vec{u}_1 + 20 \times M^n \cdot \vec{u}_3$$

$$M^n \cdot \vec{v} = 100 \times 1^n \cdot \vec{u}_1 + 20 \times 3^n \cdot \vec{u}_3$$

$$M^n \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \times 3^n \\ -20 \times 3^n \\ -20 \times 3^n \end{pmatrix}$$

$$M^n \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 20 \times 3^n \\ 100 + (-20 \times 3^n) \\ -20 \times 3^n \end{pmatrix}$$

$$M^3 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 540 \\ -440 \\ -540 \end{pmatrix}$$

2 Équations différentielles

2.1 Points d'équilibres

Déterminer les points d'équilibre des équations différentielles suivantes :

- a. $X'(t) = X(t) - 4$
- b. $dx/dt = x^2 - y^2$
- c. $y' = y(y + 2K)$
- d. $P'(t) = \rho P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{B}\right) \left(P(t) + \frac{A}{C}\right)$
- e. $\begin{cases} x'(t) = (4 - y(t))x(t) \\ y'(t) = (x(t) - 2)y(t) \end{cases}$

Correction :

- a. $X^* = 4$
- b. $x_1^* = y, x_2^* = -y$
- c. $y_1^* = 0, y_2^* = -2K$
- d. $P_1^* = 0, P_2^* = B$ et $P_3^* = -A/C$
- e. $(x, y)_1^* = (0, 0)$ et $(x, y)_2^* = (2, 4)$

2.2 Stabilité

Etudier la stabilité des équilibres des équations différentielles b. (avec $y > 0$) et d. ($0 < \rho < A < B < C$) de l'exercice précédent.

Correction :

b. $F(x) = x^2 - y^2$, $F'(x) = 2x$, $F'(x_1^*) = 2y > 0$ équilibre instable, $F'(x_2^*) = -2y < 0$ équilibre stable

d. Soit $\frac{A}{C} = K$, avec $0 < K < 1$.

$$F(x) = \rho x \cdot \left(1 - \frac{x}{B}\right) \cdot (x + K) \Rightarrow F(x) = u(x)v(x)w(x)$$

avec

$$u(x) = \rho x, \quad v(x) = 1 - \frac{x}{B} \quad \text{et} \quad w(x) = x + K$$

$$F'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \rho\left(1 - \frac{x}{B}\right)(x + K) - \frac{\rho}{B}x(x + K) + \rho x\left(1 - \frac{x}{B}\right)$$

$$F'(P_1^*) = \rho\left(1 - 0/B\right)(0 + K) - 0 + 0 = \rho K > 0 \quad (INSTABLE)$$

$$F'(P_2^*) = 0 - \frac{\rho}{B}B(B + K) + 0 = -\rho(B + K) < 0 \quad (STABLE)$$

$$F'(P_3^*) = 0 - 0 + \rho(-K)\left(1 - (-K)/B\right) = -\rho K\left(1 + K/B\right) < 0 \quad (STABLE)$$

2.3 Champs de vecteurs

Dessiner les champs de vecteurs associés aux deux équations différentielles étudiées précédemment.

Correction :

b. L'équation différentielle b. présente 2 points d'équilibre, y et $-y$, respectivement instable et stable. Le champ de vecteurs est présenté figure 1.

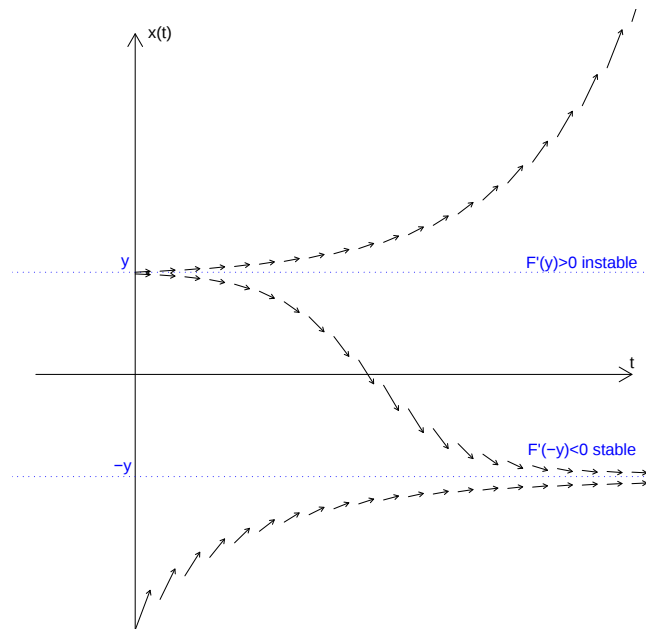


Fig. 1 – Champ de vecteur de l'équation différentielle $dx/dt = x^2 - y^2$.

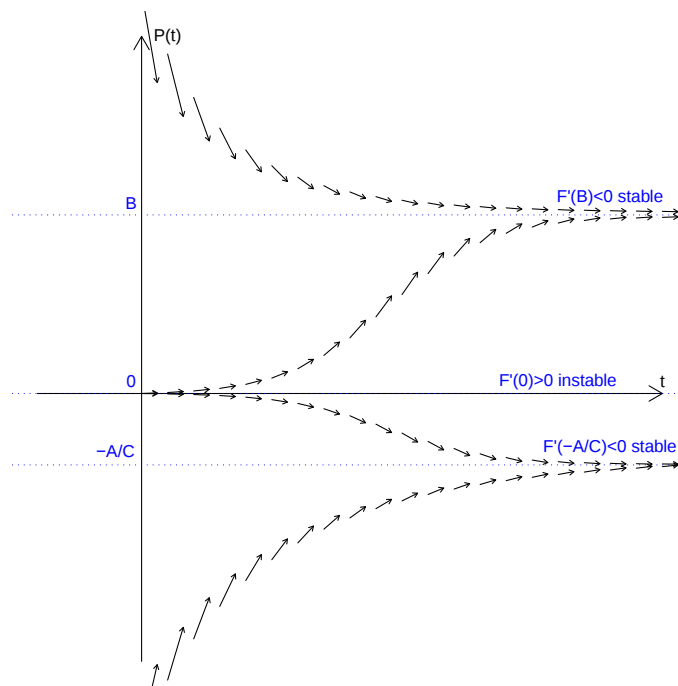


Fig. 2 – Champ de vecteur de l'équation différentielle $P'(t) = \rho P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{B}\right) \left(P(t) + \frac{A}{C}\right)$.

d. L'équation différentielle d. présente 3 points d'équilibre, en B (stable), en 0 (instable) et en $-\frac{A}{C}$ (stable). Le champ de vecteurs associé est présenté figure 2.